الموضوع: محاضرة (7)　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　9/ 5/ 2018 الأربعاء

المسائل الحدية:

- **مقدمة**: في هذا الفصل سنعالج مسائل القيم الحدية للمعادلات التفاضلية العادية والجزئية لما لها من أهمية كبيرة في التطبيقات الفيزيائية والهندسية.

- **مسألة القيم الحدية للمعادلات التفاضلية العادية**:

في المسائل الحدية للمعادلات التفاضلية العادية تُعطى قيمة الدالة المجهولة (الحل) في نقطتين، وهاتين النقطتين هما حدود المجال الذي يطلب تعيين وتعريف الحل عليه.

مثلاً: من أجل حل المسألة الحدية التالية:

(معادلة تفاضلية عادي) $L(y) \equiv a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x)$ ... [1]

حيث $a \le x \le b$ (المجال)

والشروط الحدية المفروضة هي:

$$\left.\begin{aligned} \alpha y(a) + \beta y'(a) &= 0 \\ \gamma y(b) + \delta y'(b) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots [2]$$

حيث a و b طرفا المجال (حدود التكامل)

هنا المطلوب: ايجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية [1] الذي يحقق المعادلة [1] وتعيين الثوابت الاختيارية الحاصلة في الحل العام، بحيث يحقق أيضاً الشروط الحدية [2]

[ملاءمة الحل مع الشروط الحدية]

ملاحظة: إن المسائل الحدية المطروحة ليست قابلة للحل دوماً، وإذا كانت قابلة للحل فإن هذا الحل ليس وحيداً. [وهذا بعكس مسألة كوشي، إن مسائل كوشي محددة وحلها وحيد نظراً من تلك النقطة والشروط الابتدائية]

مثال: أوجد حل للمعادلة التفاضلية التالية:

$y'' - y = 0$ ... ①

حيث $y = y(x)$ الذي يحقق الشروط الحدية:

$[y(0) = 3 \qquad y(1) = y'(1) = 1]$ ... ②

حيث طرفي المجال هنا 0، 1

/ /

الموضوع:

الحل: من المعروف أن كل حلول المعادلة السابقة (1) تعطى بالعلاقة:

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{+x} \quad \text{---} \ (*)$$

حيث c_1 و c_2 ثابتان اختياريان في الحل العام.

يمكننا التأكد من ذلك. ⇐

التأكد من الحل

نبحث عن حلول من شكل $y = e^{\lambda x}$ نشتق مرتين ونعوض:

$y' = \lambda e^{\lambda x}$ $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

$\Rightarrow \lambda^2 e^{\lambda x} - e^{\lambda x} = 0$

$\Rightarrow \boxed{\lambda^2 - 1 = 0}$ معادلة مميزة

$\Rightarrow \lambda = \pm 1$

إذا الحلول هي:

$y = e^{\lambda x}$

$y_1 = e^{x}$

$y_2 = e^{-x}$

والآن لنحدد قيم الثابتين c_1 و c_2 بحيث يحقق هذا الحل (*) الشروط الحدية (2)

وذلك من خلال عملية ملاءمة الحل مع الشروط (2) كما يلي:

من الشرط الأول حيث:

$$y|_{x=0} = 3 \ \overset{(*)}{\Rightarrow} \ \boxed{3 = c_1 + c_2} \ \text{--} \ 3$$

ومن الشرط الثاني نجد أن حيث:

$$y|_{x=1} = y'|_{x=1} = 1$$

$$(*) \Rightarrow 1 = c_1 e^{-1} + c_1 e^{1} \quad \text{---} \ (4)$$

وبالاشتقاق من (*) مرة يكون:

$$y' = -c_1 e^{-x} + c_2 e^{x}$$

وبالتعويض في الشرط الثاني في المعادلة الأخيرة:

$$1 = -c_1 e^{-1} + c_2 e^{1} \quad \text{---} \ (4')$$

الآن بجمع (4) و (4') يكون:

$$2 = 2 c_2 e^{1} \Rightarrow \boxed{c_2 = \frac{1}{e}}$$

ولحساب c_1 نعوض في (3) النتيجة الأخيرة:

$$(3) \Rightarrow c_1 = 3 - c_2 \Rightarrow \boxed{c_1 = 3 - \frac{1}{e}}$$

ومنه نعوض في الحل (*) فيكون الحل المطلوب:

$$(*) \Rightarrow y = \left(3 - \frac{1}{e}\right) e^{-x} + \frac{1}{e} e^{x}$$

وهو الحل المطلوب بالنسبة للشروط الحدية المعطاة.



الموضوع:

مثال: لدينا المعادلة التفاضلية (مسألة حدية): $y'' + y = 0$ ---- (1)

والشرط الحدي:

$$\begin{cases} y(0) = 0 & \text{I} \\ y(a) = y_0 & \text{II} \end{cases} \quad \text{---- (2)}$$

$y_1 = e^{ix}$, $y_2 = e^{-ix}$

$e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$

$y_{1R} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

$y_{2R} = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

$y_{1R} = \cos x$

$y_{2R} = \sin x$

الحل: نعلم أن الحل العام لهذه المعادلة التفاضلية هو

$[y = c_1 \cos x + c_2 \sin x]$ (*)

حيث c_1 و c_2 ثابتان اختياريان.

ولنحدد (نحسب) قيم الثوابت c_1 و c_2 بحيث يحقق الحل (*) الشروط الحدية (2).

وذلك بعد التعويض بالشروط الحدية (2) كما يلي:

نلاحظ أن المسألة أطراف المسألة هما a و 0

$$(\text{I}) \Rightarrow (*) \Rightarrow 0 = c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0)$$

$$\Rightarrow \boxed{c_1 = 0}$$

وأما من أجل حساب c_2 فلدينا من الحل: $c_1 = 0$ حيث $y = c_2 \sin x$

ومن الشرط II يكون:

$$y(a) = c_2 \sin a = y_0$$

$$\boxed{y_0 = c_2 \sin a}$$

ونناقش حسب a:

- إذا كانت $a \neq n\pi$ عندئذٍ: $c_2 = \frac{y_0}{\sin a}$

وبالتالي يوجد في هذه الحالة حل وحيد للمسألة الحدية وهو من (*)

$$\boxed{y = \frac{y_0}{\sin a} \cdot \sin x}$$

- أما إذا كانت $a = n\pi$ فإن الشرط الحدي عندئذٍ $y_0 = c_2 \sin a$

من أجل $y_0 = 0$ يكون محققاً من أجل أي قيمة لـ c_2 وبالتالي لدينا مجموعة حلول لا نهائية للمعادلة من الشكل $\boxed{y = c_2 \sin x}$ وحيث c_2 ثابت كيفي

الموضوع:

$y_0 \neq 0$ و $a = n\pi$ أما في حال كانت $y_0 = C_2 \sin a$ غير محققة

فإن الشرط الحدي في هذه الحالة (مستحيلة) وهو المطلوب.

والمعادلة (المسألة الحدية) لا تملك أي حل.

2-1- دالة غرين:

إن دالة غرين للمسألة الحدية [1 و 2] السابقة في الدالة التالية:

$(G(x,s))$

المعرفة عندما $x \in [a,b]$ و $s \in (a,b)$

حيث a من أجل كل قيمة مثبتة لـ s من المجال $[a,b]$ تحقق الخواص التالية:

(P1) عندما $x \neq s$ فإن الدالة $G(x,s)$ تحقق المعادلة التفاضلية:

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 \quad \text{---} \quad \boxed{3}$$

(ب) عندما $x=b$ و $x=a$ فإن الدالة $G(x,s)$ تحقق الشرط الحدي [2]

(ج) عندما $x=s$ فإن الدالة $G(x,s)$ تكون مستمرة بالنسبة للمتحول x و

مشتقها بالنسبة لـ x يملك انقطاعاً من النوع الأول يساوي $\frac{1}{a(x)}$

هنا يعني أن

$$\left.\begin{aligned} &G(s+0,s) = G(s-0,s) && \text{الاستمرار} \\ &G'_x(s+0,s) - G'_x(s-0,s) = \frac{1}{a(x)} && \text{انقطاع من النوع الأول} \end{aligned}\right\} \text{---} \boxed{4}$$

وطبعاً من أجل إيجاد دالة غرين للمسألة الحدية [1 و 2] يجب إيجاد حلين

$y_1(x)$ و $y_2(x)$ (مستقلين خطياً) للمعادلة [3] المتجانسة من [1]

واللذان يحققان الشرط الحدي [2].

إذا كان $y_1(x)$ لا يحقق بآن واحد الشرطين الحديين [2] فإن دالة غرين

تكون موجودة ويمكن البحث عنها بالشكل:

$$G(x,s)=\begin{cases}\varphi(s)\,y_1(x) & ; a\le x\le s\\ \psi(s)\,y_2(x) & ; s\le x\le b\end{cases} \quad \text{--- } [5]$$

حيث أن الدالتين $\varphi(s)$ و $\psi(s)$ يمكن اختيارها بحيث تحقق الدالة [5] (دالة غرين) الشرط [4] وهنا يعني: أي أن تحقق التالي:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{الاستمرار} \quad \psi(s)\,y_2(s)=\varphi(s)\,y_1(s) & ; x=s\\ \text{الانقطاع} \quad \psi(s)\,y_2'(s)-\varphi(s)\,y_1'(s)=\dfrac{1}{q(s)} & ; x=s\end{array}\right\} \text{--- } [6]$$

عندئذٍ وبعد ايجاد دالة غرين هذه، وبهذه الطريقة فإن حل المسألة الحدية [1] و [3] يعبر عنه بالعلاقة:

$$y(x)=\int_a^b G(x,s)\,f(s)\,ds \qquad [7]$$

المعادلة المتجانسة يا [?] غرين الغير متجانسة حولها بـ غرين المتجانسة ([?])

الحل في الامتحان نوجد الحلول أول وبدون اختصار

مثال: استخرج دالة غرين للمسألة الحدية التالية:

$$y''-y=f(x)$$

حيث $y(x)$ محدود لأجل $x\in(-\infty,+\infty)$

الحل: أولاً: الحل العام للمعادلة المتجانسة المناظرة للمعادلة المعطاة [1] (معروف) وهو:

$$[y=c_1 e^{-x}+c_2 e^{x}]$$

حلين خاصين لها:

$$y_1(x)=e^{+x} \qquad\qquad y_2(x)=e^{-x}$$

نلاحظ أن الحل الخاص:

$$y_1(x)=e^{+x}$$

محدود عندما $x\longrightarrow-\infty$

وكذلك الحل الخاص: $y_2(x)=e^{-x}$

محدود عندما $x\longrightarrow+\infty$

ونلاحظ أن الشرط الحلول لا يحقق الشرطين الحديين بآنٍ واحد كما الحل التالي.

لذلك دالة غرين للمسألة الحدية هنا تملك الشكل:

/ /

الموضوع :

$$G(x,s) = \begin{cases} \varphi(s)\, e^{x} & ; -\infty < x \le s \\ \psi(s)\, e^{-x} & ; s \le x < +\infty \end{cases}$$

حيث الدالتين $\varphi(s)$ و $\psi(s)$ تتعينان من العلاقتين التاليتين [مثل 9]

[4] $\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} \psi(s)\, e^{-s} &= \varphi(s)\, e^{s} \\ -\psi(s)\, e^{-s} &= \varphi(s)\, e^{s} + 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ بالحل المشترك

فيكون

$$\varphi(s) = -\frac{1}{2}\, e^{-s} \qquad \psi(s) = -\frac{1}{2}\, e^{s}$$

(بالدينا دلث بنفسك)

ومن هنا ينتج أن $\boxed{f(s)=1}$ دالة غرين للمسألة الحدية هي :

$$G(x,s) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\, e^{x-s} & ; -\infty < x < \infty \\ -\frac{1}{2}\, e^{s-x} & ; s < x < +\infty \end{cases}$$

وهو المطلوب .

المطلب 2: ثم اكتب عبارة الحل للمسألة الحدية المعطاة بدلالة غرين الناتجة :

ولدينا صيغة الحل بدلالة غرين هي :

$$y(x) = \int_a^b G(x,s)\, f(s)\, ds \Rightarrow$$

$$y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x,s)\, f(s)\, ds \Rightarrow$$

$$y(x) = \int_{-\infty}^{x} -\frac{1}{2}\, e^{x-s} f(s)\, ds - \int_{x}^{+\infty} \frac{1}{2}\, e^{s-x} f(s)\, ds$$

حيث $x = s$

وهو المطلوب .

(لو اعطانا قيمة لـ $f(s)$ نعوض في العبارة ونكامل)

مثال وظيفة : استخرج دالة غرين للمسألة الحدية

$$y'' = f(x)$$

$$y(-1) = y(1) = 0$$

$; -1 < x < 1$

-1   1